# 受験数学の再生

## ――文化的価値とのかかわりで――

本　間　俊　宏

**概　要**　受験数学を入試問題の解法の探求にとどめず，楽しみ，味わうためには問題の背景にまで肉薄する必要がある。本稿ではそのような受験数学の再生を文化的価値とのかかわりで考察する。

**検索語**　受験数学の再生　数学教育の価値　文化的価値

## I　はじめに

筆者は，数学教育の価値については，次のようなものがあると考えている。

① 実質的価値
② 形式的価値
③ 文化的価値
④ 情意的価値
⑤ 情報的価値

①は実質陶冶であり，数学の内容そのものが実際の生活で役に立つという価値である。②は形式陶冶であり，数学のもつ形式的側面，例えば論理性，形式性は数学を離れても一人歩きできるという価値である。

筆者は，はじめ①のみを価値として認めていた。それは，数学教育は実在の現象とのかかわりで学ぶべきであると考え，実践し研究していたからである。しかし，次第に②にも価値を認め，ついには，①②のどちらにもかたよらないバランス感覚が肝要であると考えるようになった。

さらに，最近では，数学は文化の形成にも作用しているという価値，すなわち③にも価値を認めるようになった。

最近の学生は，問題を解けたときの喜びの再生産としての情意的価値，すなわち④に関心を示す。

今は，数学をひとつの情報として，情報とのかかわりで価値があるのではと考え，⑤についても考えてみたい。

学生に関心のある価値をあげてもらうと，152名の調査では，

①は５７名（３７.５％）
②は２４名（１５.８％）
③は　４名（　２.６％）
④は６７名（４４.１％）

であった。①への関心の高さは自然であるが，④への関心の高さには注目したい。

問題を解くプロセスや形式性には関心を示しにくく，まして，問題の背景にある文化にまでは関心を示しにくい。

本稿では，これらの数学教育の価値のなかで，文化的価値に焦点をしぼり，大学入学試験問題を例として，受験数学の再生を兼ねて，その背景にある文化を視野に入れて考察する。

## II　受験数学の再生

1994年11月に大阪で開催された第５回５か国数学教育国際会議の出席者による学校参観が企画され，大阪教育大学教育学部附属高等学校天王寺校舎の瀬尾祐貴教諭による同校２年生を対象とした授業が計画された。

この授業参観の企画について，岡森・本間（1995）は次のように述べている。

「数学教育の国際交流における授業参観は，国際会議における講演（研究発表）を補完するもの，むしろメインに位置づけられるべきである。

そこには共通のテーマがあり，それを授業として具現化する。

授業を参観する側にはそれなりの目的があり，研究授業を行う側にはそれなりの意図がある。

これまでの考察より，授業研究のポイントは，次のようになる。

① 国際的に共通な研究テーマの方向にそった授業であること。
② 教育内容があること。
③ 授業を通して，その国の子どもの認識の実態がよくわかる。
④ 授業者の力量が問われる。
⑤ バックにある数学が問われる。

このような授業参観が数学教育の国際交流における原点となり，研究交流が具体的に実践的に発展すると確信している。ここにも数学教育の進化がみられよう。」

さて，筆者は，同校参観の企画の責任者として，授業者の瀬尾と協議を重ねた。この企画では，高等学校の生徒を対象に，C言語を用いて，コンピュータを活用した数学の授業を実践することであった。

C言語とコンピュータの活用となると，コンピュータ・グラフィックスがメインとなり，教材としては，空間図形がテーマとなる。

この時期，瀬尾は同校2年生に「空間図形の方程式」の指導を計画していた。そして，瀬尾はそのしめくくりとして次の入試問題を扱うことを筆者に提案した。

問題　空間座標において，
2点A(1,0,0)，B(1,1,1)を結ぶ線分を$z$軸の周りに回転してできる回転体の表面の方程式と体積を求めよ。

この問題の解は次のようになる。

解　線分AB上の任意の点を
$P(x,y,z)$とする。

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\quad(0\leqq t\leqq 1)$$

$\therefore(x-1,\ y,\ z)=t\,(0,\ 1,\ 1)$

$\therefore x=1,\ y=t,\ z=t$

$x^2+y^2=1+t^2$ だから

$x^2+y^2=1+z^2$

故に，回転体の表面の方程式は，

$x^2+y^2-z^2=1$　　(答)

次に，回転体を点Pをとおる$xy$平面に平行な平面で切った切り口の円の面積は，

$S(t)=\pi(1+t^2)\ (0\leqq t\leqq 1)$

従って，回転体の体積Vは，

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 S(t)\,dt\\&=\int_0^1 \pi\,(1+t^2)\,dt\\&=\pi\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^1\\&=\frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$
(答)

この入試問題のポイントは次のようである。

① 回転体である。
② ベクトルを利用する。
③ 空間の直線の方程式をつくる。
④ $xy$平面，$yz$平面，$zx$平面でこの回転体を切ったときの切り口の図形とその方程式をつくる。
⑤ 積分により体積を求める。

筆者と瀬尾は回転体をめぐって協議した。どのような回転体であるかをイメージすることが，この問題を解くキーポイントである。すなわち，授業のテーマである。

$z$軸に平行な線分を$z$軸のまわりに回転してできる回転体は直円柱である。

協議はレストランで食事をしながら行ったので，箸立てにぎっしりつまった割り箸が側にあった。

これこそが直円柱である。$z$軸とねじれの位置にある線分を$z$軸のまわりに回転してできる回転体は，目の前にある割り箸の束の両端を両手でねじった形である。この形は，神戸の中突堤にある神戸ポートタワーであることに筆者は思い至った。このような立体は，鼓があり，籐で編んだ椅子もある。この回転体は文化として根付いている。と，筆者たちの協議ははずんだ。

$z$軸とねじれの位置にある線分を$z$軸から限りなく遠ざけると，そのときの回転体は限りなく円柱に近くなる。これはその線分上の各点と$z$軸との距離がどの点もほとんど等しいことを意味する。また，この回転体がくびれた形になるのは，その線分上の各点と$z$軸との距離が少しずつ異なるからである。

瀬尾（1995）は，「中学時代はよくでてくる立方体に対しては豊かにイメージできるが，あまりでてこない正四面体や正八面体などに対してのイメージは高校時代になってもよくない。微積分では複雑な図形を扱うので，イメージが弱いと苦痛になってしまう。」と述べ，とくに空間図形のイメージのなさについて苦慮している。

上述の問題の解決には，どのような回転体であるかをいかにイメージできるかがかかつている。授業では，どうすればイメージできるかということになる。

空間座標の上に線分を１本ずつ引き回転体をイメージさせる。さらに，コンピュータ・グラフィックスにより，パソコンの画面の上に回転体を描き，イメージをつかませる。

これでも分かりにくいと思われるので，神戸ポートタワーの模型をつくる。

また，束にした割り箸をねじった形にするため。円板状のボール紙を２枚用意し，その円周に竹ひごをとおし，円筒形をつくる。それをねじることで回転体をイメージする。

大学入試を射程にいれた授業では，与えられた条件にあう回転体をイメージさせることにのみポイントをしぼりがちになる。

この回転体が日本の文化として根付いており，その延長上で，神戸ポートタワーが建造されているといったことに言及することは思いも寄らないことである。

岡森・本間（1995）は，上述の高等学校２年生の授業「２直線による回転体」について，次のように述べている。

「空間の２直線のうち１つの直線を軸として他の直線を回転した回転体の表面の方程式や回転軸に垂直な２つの平面に挟まれた部分の体積を求めた。

授業の過程では，実在の模型（神戸ポートタワーや鼓）をもとに，コンピュータのシミュレーションにより，回転体をイメージした。

空間の直線の方程式から表面の方程式を導出する。

この授業のポイントは，入試問題の解法にとどまらず，このような回転体が実在すること，換言すれば文化として存在することに踏み込んだところにある。

さらに，回転体をイメージする補助としてコンピュータ・グラフィックスを用いたこと。授業者はＣ言語によるプログラミングを試みている。これを生徒がＣ言語によるプログラミングをすればもっとよかったが，時間の都合でそこまで踏み込めなかった。

生徒は，模型とシミュレーションにより，なにを立式すればよいかが検討づけられた。

実際の授業では，体積を求めることは次時に持ち越された。

授業での問題設定は，点Ａ(1,0,0)とＢ(1,1,1)を結ぶ線分を$z$軸のまわりに回転してできる立体について考察することであった。

この立体をイメージすることは難しい。しかし，回転軸とねじれの位置にある棒を回転軸のまわりに回転した立体は，神戸ポートタワーにその典型がみられる。また，小鼓や竹で編んだ椅子にもみられる。

授業では，プリントの空間座標上に作図して回転体のイメージをつかみ，そののち，コンピュータのシミュレーションにより回転体のイメージを確認した。先に，神戸ポートタワーの模型をみていたので，回転体の作図には支障はみられなかった。

次に，直線ＡＢの方程式

$$x=1,\ y=z$$

を求め，さらに，曲面の方程式

$$x^2+y^2-z^2=1$$

を導いた。

入試問題の解法テクニックに終始しがちな授業を避け，問題の背景ともいうべき実在の建造物や文化にも触れ，生徒のイメージを喚起するためにコンピュータ・グラフィックスを活用した。しかも，Ｃ言語によるプログラミングでコンピュータ・シミュレーションのスピード化を図った。

入試問題の解法に終始せず，問題のバックにある実在とのかかわりに言及し，Ｃ言語によるプログラミングによってコンピュータ・シミュレーショ

ンを試みるところに意義がある。」

## Ⅲ　授業の実際

前述の数学教育国際会議のための参観授業は，瀬尾（1995）によると，次のように展開した。

「T：この模型（筆者注　2つの透明な円盤の周囲にひもをとおし，鼓状にした立体図形）はあるルールに従って作ったものですが，それは何だと思いますか。

S：上の円盤をねじって作ったものだと思います。

（T：このように答える生徒が多かった。しかし，ねじるという発想では次に進まないから，なんとしても授業者としては答えがでるまで粘りたい。

（筆者注　授業者は回転体を想定し，一つの軸のまわりに線分を回転してできる回転体に気づかそうとした。））

T：ほかにありませんか。

S：１本の糸を，軸を中心にして回転させたものだと思います。

T：そうですね。

（T：ほっとする。別の模型

（筆者注　2つのボール紙の円盤の周囲に竹ひごをとおし円筒状にした立体図形）

を生徒に見せ，上面の円盤を回転し，はじめと同じ模型ができることを確認する.）

T：さて，この美しい曲面はどんな形をしていると思いますか。

S：双曲線だと思います。

（T：この答えはすぐでるようである.）

T：本当ですか。それを確かめるためにはどうしたらいいでしょう。

S：（わからない）

T：これらを空間座標上に表して，方程式の形で表せば，確かめることができるかもしれませんね。

（T：次の課題を生徒に配る。

課　題

①空間内に2点A(1,0,0)，B(1,1,1)がある。線分ABを$z$軸のまわりに回転してできる曲面Cを図の座標空間に描きなさい。

②その曲面Cの方程式を求めなさい.）

T：図の座標空間に2点A，Bをプロットし，線分ABを描きなさい。

S：(線分ABを描く)

T：さらに，いくつか分かりやすい点をとって，$z$軸のまわりに回転したときの線分を描きなさい。

S：（いくつかの線分を描く）

T：このままだと，この曲面のイメージはつかめないので，パソコンの画面で，今までの作業を確認する。

T：さらに，細かくしてみる。そして，連続的に動かしてみる。

T：これでイメージはつかめたと思う。

次に，曲面Cの方程式を求めよう。

T：直線ABの方程式はどうなりますか。

S：$x=1, \dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

T：直線AB上の点P$(x,y,z)$とするとき，$x,y,z$を$t$で表しなさい。

S：$x=1$，$y=t$，$z=t$

T：点Pを$z$軸のまわりに回転したときは円であるから，その円の方程式を$t$で表しなさい。

S：$x^2+y^2=1+t^2$, $z=t$

T：$t$を消去すると曲面Cの方程式が求められます。

S：$x^2+y^2=1+z^2$

すなわち，$x^2+y^2-z^2=1$

T：$yz$平面の切り口の図形はどうなるか。

S：$yz$平面は$x=0$だから，

$y^2-z^2=1$　すなわち，双曲線。

T：$zx$平面，$xy$平面の切り口の図形はそれぞれどうなるか。

S：$zx$平面は$y=0$だから，

$x^2-z^2=1$　これも双曲線です。

S：$xy$平面は$z=0$だから，

$x^2+y^2=1$　これは円です。

T：この曲面Cと2平面$z=0$，$z=1$で囲まれた

立体図形の体積を求めます。時間になりましたので次時にします。

T：このような原理でできている回転体で知っているものはありますか。

S：鼓があります。

S：神戸ポートタワーがそうです。

T：これでおわります。

S：楽しかったです。

## Ⅳ 授業の考察

この図形がどんな形になるかをイメージするために，授業者が模型をはじめに示したことは，生徒には回転体をイメージしやすくなった。しかし，授業は，入試問題の解法に力点があったことは否定しがたい。受験を射程に入れた高等学校の授業では問題の解法に力点があったとしてもやむをえないことである。問題の背景にある文化にまで立ち入ることは横道にそれるそしりをまぬがれない。

この問題を解法以上に楽しむゆとりがほしいものである。問題の回転体は，
身近には，神戸ポートタワー（神戸にかかわりのある人でないと無理か），日本の伝統文化である鼓，籐で編んだ椅子にその例をみる。

授業者は，回転体をイメージすることに力点をおいたので，上述の文化とかかわりの深い例はイメージのための補助手段としての価値しか認めていない。筆者は，この問題の背景として，むしろ，これらの文化作品から，逆に，この問題が作成されたと考えてみることもできる。

次に，授業では，回転体をパソコンの画面に描くことを最終目標として，生徒は紙上の空間座標に分かりやすい点をとり，回転体をイメージしようとした。しかし，3次元の立体を2次元上に表現したからイメージができるというものではない。

軸と平行な位置に鉛筆を置き，その鉛筆を軸のまわりに回転したときにできる回転体が円柱であることがわかる。

さらに，軸とねじれの位置にある鉛筆を軸のまわりに回転するとき，軸と鉛筆が非常にかけはなれていれば，そのときの回転体はほぼ円柱になることがわかる。軸と鉛筆がごく近いときどうなるか。軸と鉛筆が1点で交わるときどうなるか。この議論が授業では欲しかったと筆者は考える。

## Ⅴ 今後の課題

受験数学は入試問題の解法だけに終始すれば，数学教育の価値とは無縁な存在になってしまう。しかし，解法のプロセスにおいて，問題の背景にまで肉薄するとき，すなわち，出題者の問題作成の背景を推理しようとするとき，今までみえていなかった新しい側面がみえてきて，不毛といわれる受験数学に息吹を感じるようになる。

受験数学には，入試問題の解法の探求だけでなく，問題を楽しみ，味わうゆとりが求められる。

本稿のような数学教育の価値の視点からの受験数学の再生を今後とも考察したい。

<参考文献>

岡森博和・本間俊宏（1995）「数学教育は進化しているか（Ⅱ）－その国際交流における授業参観とかかわって－」１９９５年度数学教育学会春季年会発表論文集

瀬尾祐貴（1995）「２直線による回転体」研究集録（38，79-86）大阪教育大学教育学部附属高等学校天王寺校舎